

2007. aasta matemaatika
riigieksami ülesanded koos
lahenduste ja kommentaaridega

1. ÜLESANNE

(5 punkti)

Ülesannete tekstid

I Antud on avaldis $\frac{1+5x}{x^{-2} \cdot (25x^2 - x^0)}$, kus $x \neq 0$ ja $x \neq \pm \frac{1}{5}$.

1) Lihtsustage see avaldis.

2) Arvutage avaldise väärtus, kui $x = 2^{\frac{3}{2}}$. Vastus andke täpsusega 10^{-2} .

II Antud on avaldis $\frac{x^{-2}(9x^2 - x^0)}{1+3x}$, kus $x \neq 0$ ja $x \neq -\frac{1}{3}$.

1) Lihtsustage see avaldis.

2) Arvutage avaldise väärtus, kui $x = 2^{\frac{3}{2}}$. Vastus andke täpsusega 10^{-3} .

III Antud on avaldis $\frac{9x^2 - 4}{(3x+2)^2} - \frac{1}{(3x)^0}$, kus $x \neq 0$ ja $x \neq -\frac{2}{3}$.

1) Lihtsustage see avaldis.

2) Arvutage avaldise väärtus täpsusega 10^{-3} , kui $x = 5^{-\frac{1}{2}}$.

Vastused

I 1) $\frac{x^2}{5x-1}$; 2) 0,61. **II** 1) $\frac{3x-1}{x^2}$; 2) 0,936. **III** 1) $-\frac{4}{3x+2}$; 2) -1,887.

Näpunäited

Lihtsustamisel vabastame kõigepealt avaldise negatiivsest astendajast ja astendajast 0:

I ja **II** $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $x^0 = 1$, **III** $(3x)^0 = 1$.

Lahutame avaldises esineva ruutude vahe tegureiks: $25x^2 - 1 = (5x+1)(5x-1)$,
 $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$, $9x^2 - 4 = (3x+2)(3x-2)$.

Lahendused

I

$$1) \frac{1+5x}{x^{-2} \cdot (25x^2 - x^0)} = \frac{1+5x}{\frac{1}{x^2}(25x^2 - 1)} = \frac{x^2(1+5x)}{(5x+1)(5x-1)} = \underline{\underline{\frac{x^2}{5x-1}}}.$$

2) Kui $x = 2^{\frac{3}{2}}$, siis avaldise väärtus on

$$\frac{(2^{\frac{3}{2}})^2}{5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} - 1} = \frac{8}{5 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{8}{10\sqrt{2} - 1} \approx \underline{\underline{0,61}}.$$

III

$$1) \frac{9x^2 - 4}{(3x+2)^2} - \frac{1}{(3x)^0} = \frac{(3x+2)(3x-2)}{(3x+2)^2} - \frac{1}{1} = \frac{3x-2}{3x+2} - 1 = \frac{3x-2-3x-2}{3x+2} = \underline{\underline{-\frac{4}{3x+2}}}.$$

2) Kui $x = 5^{-2}$, siis avaldise väärtus on

$$-\frac{4}{3 \cdot 5^{-2} + 2} = -\frac{4}{3 \cdot \frac{1}{25} + 2} = -\frac{4}{\frac{3}{25} + 2} = -\frac{4}{\frac{53}{25}} = -\frac{4 \cdot 25}{53} = -\frac{100}{53} \approx \underline{\underline{-1,887}}.$$

Kommentaariid

Juuresolevates lahendustes on esmalt leitud lihtsustamisel saadud avaldiste täpsed väärtused ning seejärel ligikaudsed väärtused etteantud täpsusega. Kuna ülesandes täpseid väärtusi ei küsitud, siis võib kalkulaatoriga teha kõik tehted järjest, vahepealseid tulemusi fikseerimata.

2. ÜLESANNE

(5 punkti)

Ülesannete tekstid

I Urnis on 10 kollast ja 6 rohelist kuuli. Leidke tõenäosus, et urnist

- 1) juhuslikult võetud kuul on roheline;
- 2) juhuslikult korraga võetud kaks kuuli on mõlemad rohelised.

II Karbis on 9 valget ja 7 musta palli. Leidke tõenäosus, et karbist

- 1) juhuslikult võetud pall on valge;
- 2) juhuslikult korraga võetud kaks palli on mõlemad valged.

III Esimeses urnis on 5 punast ja 3 sinist kuuli, teises 4 punast ja 3 sinist kuuli. Leidke tõenäosus, et

- 1) esimesest urnist juhuslikult võetud kuul on sinine;
- 2) võttes kummastki urnist juhuslikult ühe kuuli, on mõlemad kuulid sinised.

Vastused

I 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$. **II** 1) $\frac{9}{16}$; 2) $\frac{3}{10}$. **III** 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{9}{56}$.

Näpunäited

Esimeses alaülesandes on tegemist lihtsündmusega. Lihtsündmuse tõenäosus on määratud soodsate elementaarsündmuste arvu suhtega kõikide elementaarsündmuste arvusse.

Teises alaülesandes on tegemist liitsündmusega. Kõigepealt tuleb selgeks teha, kas on tegemist sündmuste korrutisega või sündmuste summaga, teiste sõnadega, kas on vaja rakendada tõenäosuste korrutamise või liitmise lauset. Tõenäosuste korrutamise lause puhul on oluline teada, kas korrutatavad sündmused on sõltumatud või mitte. Tõenäosuste liitmise lause korral peab teadma, kas liidetavad sündmused on üksteist välistavad või mitte.

Lahendused

I

1) Olgu urnist rohelise kuuli võtmine sündmus A .

$P(A) = \frac{m}{n}$, kus n on kõigi võimaluste arv ja m – soodsate võimaluste arv.

Karbis on 16 kuuli, järelilikult ühe kuuli võtmiseks on 16 võimalust, seega $n = 16$.

Karbis on 6 rohelist kuuli, seega soodsaid juhuseid rohelise kuuli saamiseks on 6, seega $m = 6$.

Järelilikult $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

2) Tähistame sündmused järgmiselt:

A – rohelise kuuli tulek kahe kuuli korraga või järgemööda võtmisel,

A_1 - rohelise kuuli tulek esimesel võtmisel,

A_2 - rohelise kuuli tulek teisel võtmisel.

Küsitakse kahe korraga või järgemööda toimuva sündmuse tõenäosust, järelikult tuleb kasutada tõenäosuste korrutamise lauset.

Kahe kuuli korraga võtmist võib vaadelda kui kuulide järgemööda võtmist, kui esimesena võetud kuuli enne teise kuuli võtmist urni tagasi ei panda. Seega sündmuse A_2 tõenäosus tuleb arvutada tingimusel, et sündmus A_1 on toimunud.

Järelikult

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{8}.$$

III

1) Olgu esimesest urnist sinise kuuli võtmine sündmus A .

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ kus } n \text{ on kõigi võimaluste arv ja } m - \text{soodsate võimaluste arv.}$$

Siin $n = 8$ ja $m = 3$, järelikult

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

2) Tähistame sündmused järgmiselt:

A – kahe sinise kuuli tulek kummastki urnist ühe kuuli võtmisel,

A_1 - sinise kuuli tulek esimesest urnist ühe kuuli võtmisel,

A_2 - sinise kuuli tulek teisest urnist ühe kuuli võtmisel.

Sündmused A_1 ja A_2 on sõltumatud sündmused, seega

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{56}.$$

Kommentaariid

Alaülesandes 2) võib kõigi võimaluste arvu ja soodsate võimaluste arvu leida ka kombinatsioon moodustades.

I Arvutame sündmuse A (urnist kaks juhuslikult korraga võetud kuuli on rohelised) toimumiseks soodsate võimaluste arvu m ja kõigi võimaluste arvu n , kui urnis on kokku 16 kuuli ja 6 neist on rohelised:

$$m = C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15 \text{ ja } n = C_{16}^2 = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 120.$$

Leiame

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}.$$

Juhusliku sündmuse A tõenäosuse arvutamisel tuleb silmas pidada, et $0 \leq P(A) \leq 1$.

3. ÜLESANNE

(10 punkti)

Ülesannete tekstid

I Antud on funktsioon $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$.

- 1) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
- 2) Arvutage funktsiooni vähim väärtus lõigul $[-2; 4]$.

II Antud on funktsioon $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$.

- 1) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
- 2) Arvutage funktsiooni suurim väärtus lõigul $[-2; 4]$.

III Antud on funktsioon $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

- 1) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
- 2) Arvutage funktsiooni suurim väärtus lõigul $[-1; 4]$.

Vastused

I 1) Kasvamisvahemikud $(-\infty; \frac{1}{3})$ ja $(3; \infty)$, kahanemisvahemik $(\frac{1}{3}; 3)$; 2) lõigul $[-2; 4]$ funktsiooni vähim väärtus on -27 .

II 1) Kasvamisvahemik $(\frac{1}{3}; 3)$, kahanemisvahemikud $(-\infty; \frac{1}{3})$ ja $(3; \infty)$; 2) lõigul $[-2; 4]$ funktsiooni suurim väärtus on 27 .

III 1) Kasvamisvahemikud $(-\infty; 0)$ ja $(2; \infty)$, kahanemisvahemik $(0; 2)$; 2) lõigul $[-1; 4]$ funktsiooni suurim väärtus on 14 .

Näpunäited

I, II, III 1) Funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv. Diferentseeruv funktsioon on kasvav vahemikus, kus $f'(x) > 0$ ja kahanev vahemikus, kus $f'(x) < 0$. Seega tuleb leida funktsiooni tuletis ning seejärel lahendada võrratused $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$. Kuna on tegemist kuupfunktsiooniga, siis võrratused $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$ kujutavad ruutvõrratusi.

Ruutvõrratuse lahendamiseks toimime järgmiselt:

- 1) leiame vastava ruutfunktsiooni nullkohad, st võrrandi $f'(x) = 0$ lahendid;
- 2) arvestades ruutliikme kordaja märki ja leitud nullkohti skitseerime ruutfunktsiooni graafiku (parabooli);
- 3) leiame jooniselt ruutfunktsiooni positiivsus- või negatiivsuspiirkonna.

2) Etteantud lõigus funktsiooni suurima (vähima) väärtuse leidmiseks arvutame funktsiooni väärtused vastaval ekstreemumkohal, st $f(x_{\max})$, kui küsitakse funktsiooni suurimat väärtust või $f(x_{\min})$, kui küsitakse funktsiooni vähimat väärtust, ja lõigu otspunktides. Leitud funktsiooni väärtuste hulgast valime nõutud suurima või vähima väärtuse.

Lahendused

I

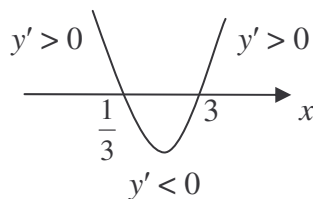
1) Leiame funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

a) Leiame funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ tuletise ja seejärel tuletise nullkohad.

$$y' = 3x^2 - 10x + 3,$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3.$$

b) Arvestades funktsiooni tuletise avaldises $y' = 3x^2 - 10x + 3$ ruutliikme kordaja märki ja tuletise nullkohti skitseerime tuletist kujutava ruutfunktsiooni graafiku (parabooli).



c) Kirjutame joonise abil välja funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Funktsioon $y = f(x)$ on kasvav argumenti x väärtuste korral, kus $f'(x) > 0$ ja kahanev argumenti x väärtuste korral, kus $f'(x) < 0$. Jooniselt näeme, et $y' > 0$, kui $x < \frac{1}{3}$ või $x > 3$ ja $y' < 0$, kui

$$\frac{1}{3} < x < 3.$$

Seega funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ kasvamisvahemikud on $(-\infty; \frac{1}{3})$ ja $(3; \infty)$;

kahanemisvahemik on $(\frac{1}{3}; 3)$.

2) Lõigul $[-2; 4]$ omandab kuupfunktsioon vähima väärtuse kas lõigu $[-2; 4]$ otspunktides või miinimumpunktis.

a) Leiame funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ graafiku miinimumpunkti ordinaadi.

Kuupfunktsioonil saab olla vaid üks lokaalne minimum. Eelnevast on näha, et kohal $x = 3$ funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks, järelikult antud funktsioonil on lokaalne minimum kohal $x = 3$.

Arvutame miinimumpunkti ordinaadi:

$$y(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 7 = -2.$$

b) Arvutame funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ väärtused lõigu $[-2; 4]$ otspunktides:

$$y(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 7 = -27,$$

$$y(4) = 4^3 - 5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 7 = 3.$$

Järjestame funktsiooni leitud väärtused: $f(-2) < f(3) < f(4)$.

Seega funktsiooni vähim väärtus lõigul $[-2; 4]$ on -27 .

II

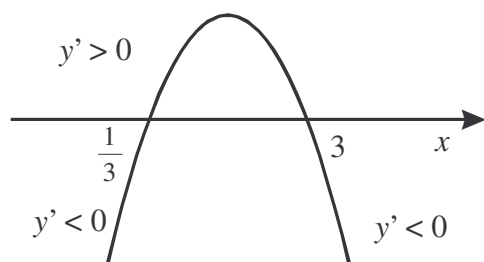
1) Leiame funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

a) Leiame funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ tuletise ja seejärel tuletise nullkohad.

$$y' = -3x^2 + 10x - 3,$$

$$y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 10x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3.$$

b) Arvestades funktsiooni tuletise avaldises $y' = 3x^2 - 10x + 3$ ruutliikme kordaja märki ja tuletise nullkohti skitseerime tuletist kujutava ruutfunktsiooni graafiku (parabooli).



c) Kirjutame joonise abil välja funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Funktsioon $y = f(x)$ on kasvav argumenti x väärtuste korral, kui $f'(x) > 0$ ja kahanev argumenti x väärtuste korral, kui $f'(x) < 0$. Jooniselt näeme, et $y' > 0$, kui $\frac{1}{3} < x < 3$ ja $y' < 0$, kui $x < \frac{1}{3}$ või $x > 3$.

Seega funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ kasvamisvahemik on $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$;

kahanemisvahemikud on $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ ja $(3; \infty)$.

3) Lõigul $[-2; 4]$ omandab kuupfunktsioon suurima väärtuse kas selle lõigul otspunktides või maksimumpunktis.

c) Leiame funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ graafiku maksimumpunkti ordinaadi.

Kuupfunktsioonil saab olla vaid üks lokaalne maksimum. Eelnevast on näha, et kohal $x = 3$ funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks, järelikult antud funktsioonil on lokaalne maksimum kohal $x = 3$.

Arvutame maksimumpunkti ordinaadi:

$$y(3) = -3^3 - 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 2.$$

d) Arvutame funktsiooni $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ väärtused lõigu $[-2; 4]$ otspunktides:

$$y(-2) = 27,$$

$$y(4) = -3.$$

Järjestame funktsiooni leitud väärtused: $f(4) < f(3) < f(-2)$.

Seega funktsiooni suurim väärtus lõigul $[-2; 4]$ on 27.

III

1) Leiame funktsiooni $y = x^3 - 3x^2 - 2$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud, st vahemikud, kus vastavalt $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$.

Leiame funktsiooni $y = x^3 - 3x^2 - 2$ tuletise

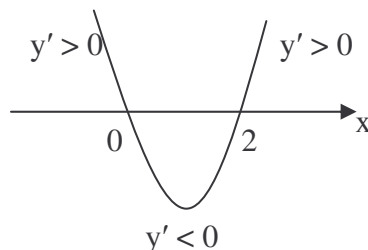
$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Kasvamisvahemike leidmiseks lahendame võrratuse $3x^2 - 6x > 0$.

Selleks

leiame tuletise nullkohad: $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$;

skitseerime parabooli, arvestades, et ruutliikme kordaja on $3 > 0$, seega parabool avaneb üles.



Jooniselt näeme, et $f'(x) > 0$, kui $x \in (-\infty; 0)$ ja $x \in (2; \infty)$, seega kasvamisvahemikud on vahemikud $(-\infty; 0)$ ja $(2; \infty)$.

Kahanemisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse $3x^2 - 6x < 0$.

Jooniselt näeme, et $f'(x) < 0$, kui $x \in (0; 2)$,

Seega kahanemisvahemik on vahemik $(0; 2)$.

2) Funktsiooni suurim väärtus lõigul $[-1; 4]$ võib olla lõigu otspunktides või kohal $x_{\max}$. Eelmises punktis skitseeritud joonise abil tuletise nullkohtade ümbrust uurides saame $x_{\max} = 0$. Seega funktsiooni lokaalne maksimum $y_{\max} = f(0) = -2$.

Leiame funktsiooni väärtused lõigu otspunktides:

$$f(-1) = -6, f(4) = 14.$$

Järjestame funktsiooni leitud väärtused: $f(-1) < f(0) < f(4)$.

Seega lõigul $[-1; 4]$ on funktsiooni suurim väärtus 14.

Kommentaariid

Diferentseeruva funktsiooni ekstreemumpunktide liigi võib määrata kas funktsiooni teist järku tuletise abil või uurides funktsiooni esimest järku tuletise märgi muutumist tuletise nullkohtade ümbruses.

Olgu funktsiooni $y = f(x)$ tuletise nullkoht x_0 .

a) Ekstreemumpunkti liigi määramine teist järku tuletise abil:

kui $f''(x_0) < 0$, siis kohal x_0 on funktsioonil maksimum,

kui $f''(x_0) > 0$, siis kohal x_0 on funktsioonil miinimum.

I $y'' = 6x - 10$

$$f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow x_{\min} = 3, \quad f''\left(\frac{1}{3}\right) = -8 < 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{3}$$

II $y'' = -6x + 10$

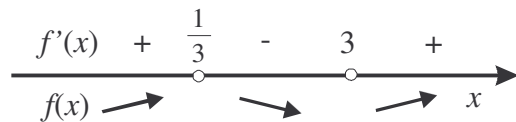
$$f''(3) = -8 < 0 \Rightarrow x_{\max} = 3, \quad f''\left(\frac{1}{3}\right) = 8 > 0 \Rightarrow x_{\min} = \frac{1}{3}$$

III $y'' = 6x - 6$

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x_{\max} = 0, \quad f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow x_{\min} = 2$$

b) Esimest järku tuletise märkide tabeli abil:

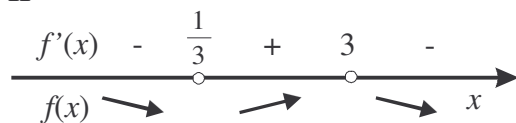
I



või

X	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; 3\right)$	3	$(3; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$7\frac{13}{27}$		-2	
		max		min	

II



või

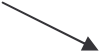
X	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; 3\right)$	3	$(3; \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$-7\frac{13}{27}$		2	
		min		max	

III



või

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$		-2		-6	
		max		min	

3) Vahemiku vōib esitada kujul $(a; b)$ vōi $]a; b[$.

4. ÜLESANNE

(10 punkti)

Ülesannete tekstid

I Antud on funktsioon $y = 2 \sin x$ lõigul $[0; 2\pi]$.

- 1) Leidke funktsiooni nullkohad ja muutumispiirkond.
- 2) Joonistage funktsiooni graafik.
- 3) Kasutades saadud graafikut, leidke
 - a) funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond;
 - b) argumendi x väärtused, mille korral $y < -1$.

II Antud on funktsioon $y = 0,5 \cos x$ lõigul $[0; 2\pi]$.

- 1) Leidke funktsiooni nullkohad ja muutumispiirkond.
- 2) Joonistage funktsiooni graafik.
- 3) Kasutades saadud graafikut, leidke
 - a) funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond;
 - b) argumendi x väärtused, mille korral $y < -\frac{1}{4}$.

III Ristkülikukujulise plekitahvli diagonaal pikkusega d moodustab lühema küljega nurga α . Plekitahvel keevitatakse mööda pikemat külge toruks. Arvutage toru läbimõõt ja ruumala, kui $d = 3,6 \text{ dm}$ ja $\alpha = 56,3^\circ$.

Vastused

I 1) $X_0 = \{0; \pi; 2\pi\}$; $Y = [-2; 2]$. **3) a)** $X^+ = (0; \pi)$; $X^- = (\pi; 2\pi)$; **b)** $x \in \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

II 1) $X_0 = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$; $Y = [-0,5; 0,5]$. **3) a)** $X^+ = \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; $X^- = \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; $X^- = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

b) $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$.

III Toru läbimõõt on $0,64 \text{ dm}$ ja ruumala $0,95 \text{ dm}^3$.

Näpunäited

I, II 1)

Funktsiooni nullkohtade arvutamiseks lõigul $[0; 2\pi]$ on vaja lahendada võrrand vastavalt kas

$$2 \sin x = 0 \text{ (I) või } 0,5 \cos x = 0 \text{ (II)}.$$

Funktsiooni muutumispiirkonna leidmiseks arvestame, et nii $y = \sin x$ kui ka $y = \cos x$ muutumispiirkond on $Y = [-1; 1]$. Järelikult $y = 2 \sin x$ ja $y = 0,5 \cos x$ muutumispiirkonna leidmiseks tuleb $y_{\min}$ ja $y_{\max}$ väärtused korrutada $y = 2 \sin x$ korral teguriga 2 ja $y = 0,5 \cos x$ korral teguriga 0,5.

I, II 2)

Funktsioonide $y = 2 \sin x$ (I) ja $y = 0,5 \cos x$ (II) graafiku joonestamiseks võib kasutada üksikuid punkte, vajadusel võib koostada valitud punktide koordinaatidest veel ka tabeli.

Funktsioonide $y = 2 \sin x$ (I) ja $y = 0,5 \cos x$ (II) graafiku võib joonestada, lähtudes vastavalt funktsioonide $y = \sin x$ (I) või $y = \cos x$ (II) graafikust. Abigraafikute $y = 2 \sin x$ või $y = 0,5 \cos x$ vastavate punktide ordinaate 2-ga (I) või 0,5-ga (II) korrutades saame vajalikud punktid ülesandes nõutud graafikute joonestamiseks.

I - II 3

a) Funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna loeme vastava funktsiooni graafikult.

b) Selleks, et leida argumenti x väärtused, mille korral $y < -1$ (I) või $y < -\frac{1}{4}$ (II), on

otstarbekas joonestada abisirge $y = -1$ (I) või $y = -\frac{1}{4}$ (II) ning leida vastava abisirge ja sinusoidi lõikepunktide abstsissid.

Sinusoidi ja sirge lõikepunktide abstsissid saab ka arvutada, lahendades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y = 2 \sin x \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{(I) või} \quad \begin{cases} y = 0,5 \cos x \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases},$$

arvestades, et $0 \leq x \leq 2\pi$.

III

Kui plekitahvel keevitatakse toruks mööda pikemat külge, siis saadud silindri kõrgus on võrdne ristküliku pikema küljega ja silindri põhja ümbermõõt on võrdne ristküliku lühema küljega.

Ristküliku külgede pikkused on leitavad täisnurkses kolmnurgas kehtivate trigonomeetriliste seoste kaudu.

Toru läbimõõdu arvutamiseks on vaja teada ringjoone pikkuse valemit ja toru ruumala leidmiseks silindri ruumala valemit.

Lahendused

I 1)

Funktsioon $y = 2 \sin x$ on antud lõigul $[0; 2\pi]$.

Funktsiooni $y = f(x)$ nullkohad on võrrandi $f(x) = 0$ lahendid.

$2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$ ja $x_3 = 2\pi$, kui $0 \leq x \leq 2\pi$.

Seega $x_0 \in \{0; \pi; 2\pi\}$ funktsiooni nullkohad on 0, π ja 2π .

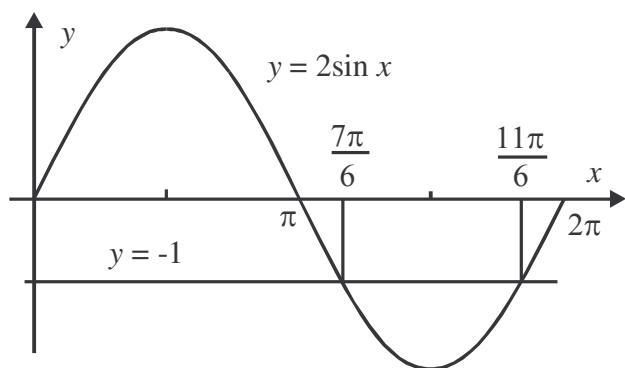
Funktsiooni muutumispiirkond on $Y = [-2; 2]$.

2)

Funktsiooni graafiku joonestamise hõlbustamiseks koostame argumenti x sobivate väärtuste ja neile vastavate funktsiooni väärtuste tabeli.

x	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$180^\circ = \pi$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$360^\circ = 2\pi$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 2 \sin x$	0	1	2	1	0	-1	-2	-1	0

Joonestame koordinaatteljestikus funktsiooni $y = 2 \sin x$ graafiku lõigul $[0; 2\pi]$.



a)

Funktsiooni $y = 2 \sin x$ graafikult näeme, et funktsiooni $y = 2 \sin x$ positiivsuspiirkond on $X^+ = (0; \pi)$ ja negatiivsuspiirkond on $X^- = (\pi; 2\pi)$.

b)

Täiendame joonist sirgega $y = -1$. Jooniselt näeme, et funktsiooni $y = 2 \sin x$ graafik on allpool sirget $y = -1$, kui $x \in \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

Tõepoolest, leides võrrandisüsteemist $\begin{cases} y = 2 \sin x \\ y = -1 \end{cases}$ joonte $y = 2 \sin x$ ja $y = -1$ lõikepunktide abstsissid:

$$\begin{cases} y = 2 \sin x \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ ja}$$

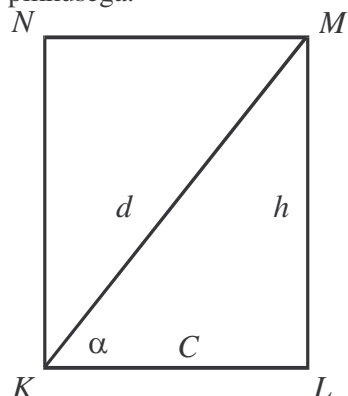
arvestades, et $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ning $0 \leq x \leq 2\pi$, on võrrandi $\sin x = -\frac{1}{2}$ lahendid $x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

ning $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Seega, kui $x \in \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$, siis $y < -1$.

III

Kujutame joonisel plekitahvli ja kanname sellele antud suurused d ($d = 3,6$ dm) ja α ($\alpha = 56,3^\circ$). Kui plekitahvel keevitatakse toruks mööda pikemat külge $NK = ML$, siis tekib silinder, mille kõrguseks (h) on plekitahvli pikem külge ja põhja ümbermõõt (C) võrdub plekitahvli lühema külje KL pikkusega.



a) Vaatleme täisnurkset kolmnurka KLM ning leiame lõikude ML ja KL pikkused:

$$\sin \alpha = \frac{ML}{KM} \Rightarrow \sin 56,3^\circ = \frac{ML}{3,6} \Rightarrow ML = 3,6 \cdot \sin 56,3^\circ \approx 2,995,$$

$$\cos \alpha = \frac{KL}{KM} \Rightarrow \cos 56,3^\circ = \frac{KL}{3,6} \Rightarrow KL = 3,6 \cdot \cos 56,3^\circ \approx 1,997.$$

Seega silindri kõrgus (h) on 2,995 dm ja põhja ümbermõõt (C) on 1,997 dm.

b) Toru läbimõõdu $2r$ arvutamiseks kasutame ringjoone pikkuse valemit $C = 2\pi r$, millest

$$2r = \frac{C}{\pi} \Rightarrow 2r \approx \frac{1,997}{\pi} \approx 0,636 \text{ (dm)}.$$

Toru läbimõõt (kahe tüvenumbriga) on ligikaudu 0,64 dm.

c) Kui $2r = 0,636$ dm, siis $r \approx 0,318$ (dm).

Arvutame toru ruumala, lähtudes silindri ruumala valemist $V = \pi r^2 h$. Saame $V \approx \pi \cdot 0,318^2 \cdot 2,995 \approx 0,951$ (dm).

Toru ruumala (kahe tüvenumbriga) on ligikaudu 0,95 dm³.

Kommentaariid

I - II

Ülesande lahendamisel peame kogu aeg silmas pidama, et funktsioone $y = 2 \sin x$ ja $y = 0,5 \cos x$ vaatleme vaid lõigul $[0; 2\pi]$.

Funktsiooni graafiku joonestamisel on oluline valida koordinaattelgedel õige mõõtkava. Kui x -teljel on π ($\pi \approx 3$) märgitud nt kuue ruudu kaugusel koordinaatide alguspunktist, siis y -teljel peaks ühik 1 asetsema kahe ruudu kaugusel.

Võrrandite $\sin x = 0$ ja $\cos x = -\frac{1}{2}$ lahendamisel võib kasutada ka trigonomeetriliste põhivõrrandite üldlahendi valemeid:

kui $\sin x = m$, siis $x = (-1)^n \arcsin m + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

kui $\cos x = m$, siis $x = \pm \arccos m + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$,

arvestades erilahendite leidmisel tingimust $0 \leq x \leq 2\pi$.

Näiteks

a) $\sin x = 0 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin 0 + n\pi \Rightarrow x = n\pi$, sest $\arcsin 0 = 0$.

Kui $n = 0$, siis $x_1 = 0$; kui $n = 1$, siis $x_2 = \pi$; kui $n = 2$, siis $x_3 = 2\pi$.

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2n\pi \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, sest

$$\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Kui $n = 0$, siis $x_1 = \frac{2\pi}{3}$; kui $n = 1$, siis $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

III

Ligikaudsete arvudega arvutamisel on soovitav teha vahepealsed tehted kalkulaatoril järjest, vahetulemusi ümardamata ja alles lõpptulemus ümardada vajaliku täpsuseni.

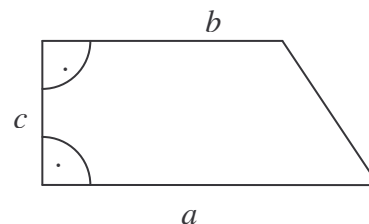
Õigeks tuleks lugeda ka ligikaudsed vastused: toru läbimõõt $0,6 \text{ dm}$ ja ruumala $1,0 \text{ dm}^3$, mis on antud algandmete täpsusega.

5. ÜLESANNE

(10 punkti)

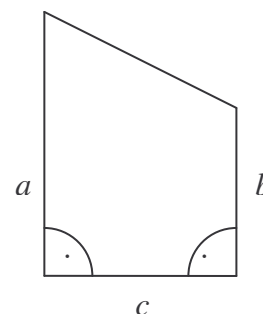
Ülesannete tekstid

I Tiik on täisnurkse trapetsi kujuline. Trapetsi alusteks olevate kallaste pikkused on a ja b ($a > b$) ning nendega ristuva kalda pikkus on c , vt joonist. Trapetsi diagonaalide lõikepunktis paikneb purskkaev.



- 1) Leidke purskkaevu kaugus tiigi kaldast pikkusega a .
- 2) Arvutage see kaugus, kui $a = 60$ m, $b = 40$ m ja $c = 30$ m.

II Hoone külge sein on täisnurkse trapetsi kujuline. Sein pikkus on c ning sein suurim ja vähim kõrgus on vastavalt a ja b ($a > b$), vt joonist. Sein diagonaalide lõikepunkti kinnitatakse prožektor.

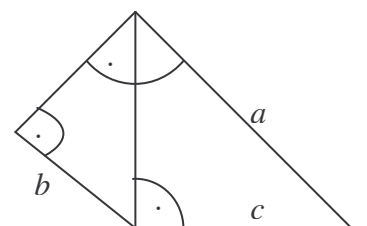


- 1) Leidke prožektori kaugus seinast servast pikkusega b .
- 2) Arvutage see kaugus, kui $a = 9$ m, $b = 6$ m ja $c = 15$ m.

III Täisnurkse trapetsi kujuline vertikaalne reklaamtahvel, mille üks diagonaal on risti pikema haaraga, toetub pikema haaraga maapinnale, vt joonist.

1) Avaldage selle reklaamtahvli nurkade kaugused maapinnast, kui reklaamtahvli paralleelsed küljed on a ja b ($a > b$) ning pikem haar on c .

- 2) Arvutage need kaugused, kui $a = 4,5$ m, $b = 2,88$ m ja $c = 2,7$ m.



Vastused **I** 1) $\frac{ac}{a+b}$; 2) 18 m. **II** 1) $\frac{bc}{a+b}$; 2) 6 m.

III 1) $\sqrt{a^2 - c^2}$, $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$; 2) 3,6 m, 2,3 m.

Näpunäited

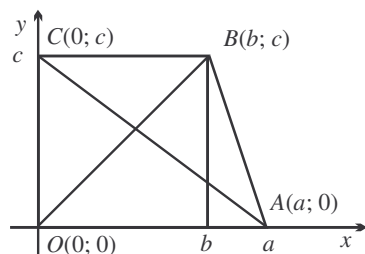
I, II Joonestame trapetsile diagonaalid ning otsitava ristlõigu diagonaalide lõikepunktist ülesandes nimetatud trapetsi küljele. Selle lõigu pikkuse leidmisel võib kasutada kolmnurkade sarnasust, rakendada koordinaatide meetodit kasutada tekkinud kolmnurkade pindalasid, rakendada koordinaatide meetodit või kasutada planimeetriaülesande lahendamist trigonomeetria rakendamisega jm.

III Märgime joonisele otsitavad lõigud. Nende lõikude pikkuste leidmisel võib toetuda kahe kolmnurga sarnasusele ning rakendada Pythagorase teoreemi.

Lahendused

I

1. lahendus



1) Vaatleme trapetsit koordinaatteljestikus. Valime koordinaatide alguspunktiks trapetsi pikema aluse ja lühema haara lõikepunkti. Suuname x-telje piki pikemat alust ja y-telje piki lühemat haara. Tähistame trapetsi tipud ja leiame tippude koordinaadid: $A(a;0)$, $B(b;c)$, $C(0;c)$, $O(0;0)$. Leiame nende sirgete võrrandid, millel asetsevad diagonaalid AC ja OB .

AC : $y = -\frac{c}{a}x + c$, OB : $y = \frac{c}{b}x$. Leiame diagonaalide AC ja OB lõikepunkti

ordinaadi, mis kujutabki küsitud kaugust.

$$\begin{cases} y = \frac{c}{b}x \\ y = -\frac{c}{a}x + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{by}{c} \\ x = a - \frac{ay}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{by}{c} = a - \frac{ay}{c}$$

$$\Rightarrow ay + by = ac \Rightarrow y = \frac{ac}{a+b}$$

.

Seega purskkaevu kaugus tiigi kaldast pikkusega a on $\frac{ac}{a+b}$.

2) Arvutame h , kui $a = 60$ m, $b = 40$ m ja $c = 30$ m.

$$h = \frac{60 \cdot 30}{60 + 40} = \underline{18 \text{ (m)}}.$$

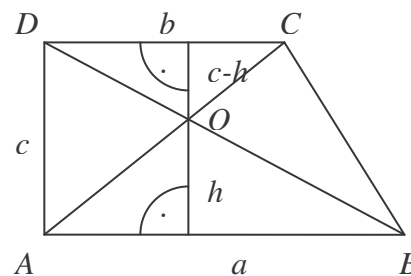
Vastus. Purskkaevu kaugus tiigi kaldast pikkusega a on $\frac{ac}{a+b}$, arvuliselt 18 m.

2. lahendus

Antud: $AB = a$, $DC = b$, $AD = c$.

Leida: kolmnurga AOB kõrgus h .

1) Trapetsi diagonaalide AC ja BD lõikumisel tekivad võrdsed tippnurgad, seega $\angle AOB = \angle DOC$. Kahe paralleelse sirge (trapetsi alused) lõikamisel kolmandaga (diagonal AC) tekivad võrdsed põiknurgad, seega $\angle CAB = \angle ACD$. Kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis on need kolmnurgad sarnased, seega $\triangle AOB \approx \triangle DOC$.



Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud. Kui kolmnurga AOB kõrgus

on h , siis kolmnurga DOC kõrgus on $c - h$. Seega

$$\frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{b(c-h)}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Siit $\frac{ah}{b(c-h)} = \frac{a^2}{b^2}$ ja $ahb^2 = a^2b(c-h)$,

jagades saadud võrduse vastavaid pooli $ab \neq 0$, saame $hb = a(c-h)$. Avaldame h :

$$hb = ac - ah \Rightarrow hb + ah = ac \Rightarrow h(b+a) = ac \Rightarrow h = \frac{ac}{a+b}.$$

2) Kauguse arvulise väärtuse saame nii nagu 1. lahenduses.

Vastus. Purskkaevu kaugus tiigi kaldast pikkusega a on $\frac{ac}{a+b}$, arvuliselt 18 m.

3. lahendus

Antud: $AB = a$, $DC = b$, $AD = c$.

Leida: kolmnurga AOB kõrgus h .

1) Vaatleme kolmnurkade pindalasid. Kolmnurga AOD pindala saab avaldada kahel erineval viisil:

$$S_{AOD} = S_{ACD} - S_{DOC} = S_{ABD} - S_{AOB}.$$

Et kolmnurga AOB kõrgus on h , siis kolmnurga DOC kõrgus on $c-h$.

Avaldades kolmnurkade pindalad antud suuruste kaudu, saame seose

$$\frac{cb}{2} - \frac{b(c-h)}{2} = \frac{ac}{2} - \frac{ah}{2}.$$

Siit $cb - cb + bh = ac - ah$ ja $h = \frac{ac}{a+b}$.

2) Kauguse h arvulise väärtuse saame nii nagu 1. lahenduses.

4. lahendus

Antud: $AB = a$, $DC = b$, $AD = c$.

Leida: kolmnurga AOB kõrgus h .

1) Trapetsi pindala saab leida kolmnurkade pindalade kaudu.

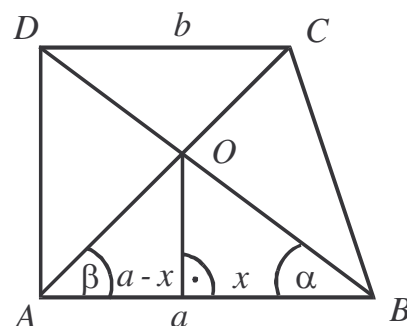
$$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{ABC} - S_{ABO} + S_{DOC}.$$

Seega $\frac{a+b}{2} \cdot c = \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} - \frac{ah}{2} + \frac{b(c-h)}{2}.$

Siit saame $ac + bc = ac + ac - ah + bc - bh$ ja $h = \frac{ac}{a+b}.$

2) Kauguse h arvulise väärtuse saame nii nagu 1. lahenduses.

5. lahendus



Antud: $AB = a$, $DC = b$, $AD = c$.

Leida: kolmnurga AOB kõrgus h .

1) Tähistame otsitava kauguse $OE = h$, lõigud $EB = x$, $AE = a - x$ ja nurgad $\angle DBA = \alpha$ ja $\angle DCA = \angle CAB = \beta$.

a) Vaatleme kolmnurki BOE ja AOE .

$$\triangle BOE : \tan \alpha = \frac{h}{x}, \text{ siit } h = x \tan \alpha \text{ ja}$$

$$\triangle AOE : \tan \beta = \frac{h}{a - x}, \text{ siit } h = (a - x) \tan \beta.$$

Järelikult $x \tan \alpha = (a - x) \tan \beta$, siit

$$x = \frac{a \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

$$\text{Seega } h = \frac{a \cdot \tan \beta \cdot \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

b) Avaldame $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$ antud suuruste a , b , ja c kaudu ning asendame need h saadud avaldisesse.

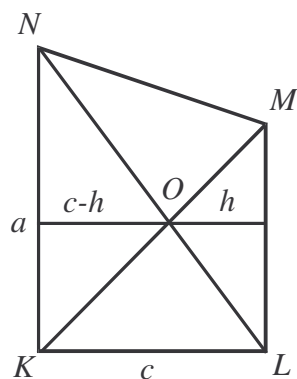
$$\triangle ADB : \tan \alpha = \frac{c}{a}.$$

$$\triangle ADC : \angle ACD = \angle BAC = \beta \text{ (põiknurgad), seega } \tan \beta = \frac{c}{b}.$$

$$\text{Seega } h = \frac{a \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{a}}{\frac{c}{a} + \frac{c}{b}} = \frac{\frac{c^2}{b}}{\frac{c(a+b)}{ab}} = \frac{ac}{a+b}.$$

2) Kauguse h arvulise väärtuse saame nii nagu 1. lahenduses.

II



Antud: $KN = a$, $LM = b$, $KL = c$.

Leida: kolmnurga LOM kõrgus h .

1) Diagonaalide lõikumisel tekivad võrdsed nurgad $\angle KON = \angle LOM$ (tippnurgad). Kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga tekivad võrdsed põiknurgad, seega $\angle LNK = \angle NLM$. Kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on sarnased, järelikult $\triangle KON$ ja $\triangle LOM$ on sarnased.

Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.

Kui kolmnurga LOM kõrgus on h , siis kolmnurga KON kõrgus on $c - h$.

Seega

$$\frac{\frac{bh}{2}}{\frac{a(c-h)}{2}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Siit $\frac{bh}{a(c-h)} = \frac{b^2}{a^2}$ ja $bha^2 = b^2a(c-h)$.

Jagades eelmist võrdust teguriga $ab \neq 0$, saame

$$ah = b(c-h).$$

Avaldame kõrguse h :

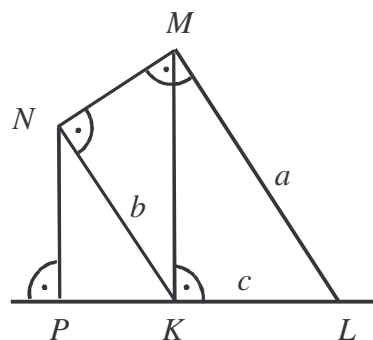
$$ah = bc - bh \Rightarrow ah + bh = bc \Rightarrow h(a+b) = bc \Rightarrow h = \frac{bc}{a+b}.$$

2) Leiame suuruse h väärtuse, kui $a = 9$ m, $b = 6$ m ja $c = 15$ m:

$$h = \frac{6 \cdot 15}{9 + 6} = \underline{6} \text{ (m)}.$$

Vastus. Prožektori kaugus seina servast pikkusega b on $\frac{bc}{a+b}$, arvuliselt 6 m.

III



Antud: $ML = a$, $NK = b$, $KL = c$.

Leida: MK ja NP .

1) Kolmnurk MKL on täisnurkne ning Pythagorase teoreemi põhjal $MK = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Et $NP \perp PL$ ja $MK \perp PL$, siis $NP \parallel MK$.

Kuna kahe paralleelse sirge NP ja MK lõikamisel sirgega NK tekivad võrdsed põiknurgad siis $\angle PNK = \angle NKM$. Kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on sarnased, seega

$$\triangle NPK \approx \triangle MNK.$$

Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, järelikult

$$\frac{NK}{NP} = \frac{MK}{NK} \Rightarrow \frac{b}{NP} = \frac{MK}{b} \Rightarrow NP = \frac{b^2}{MK} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

2) Arvutame lõikude MK ja NP pikkused, kui $a = 4,5$ m, $b = 2,88$ m ja $c = 2,7$ m:

$$MK = \sqrt{4,5^2 - 2,7^2} = \sqrt{12,96} = 3,6 \text{ (m)},$$

$$NP = \frac{2,88^2}{\sqrt{4,5^2 - 2,7^2}} = \frac{8,2944}{3,6} = 2,304 \approx 2,3 \text{ (m)}.$$

Vastus. Reklaamtahvli nurkade kaugused maapinnast on $\sqrt{a^2 - c^2}$ ja $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$, arvuliselt 3,6 m ja 2,3 m.

Kommentaariid

Teades, et sarnaste kolmnurkade vastavad joonmõõtmed on võrdelised, ja kasutades seda I variandi 2.lahenduses sarnaste kolmnurkade AOB ja DOC aluste ja kõrguste kohta, saame kohe seose

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{c-h}, \text{ millest } h = \frac{ac}{a+b}.$$

Analoogiliselt saame II variandi puhul seose $\frac{a}{b} = \frac{c-h}{h}$, millest $h = \frac{bc}{a+b}$.

Punkti kauguse küljest saab avaldada ka nurkade kaudu, kasutades arkusfunktsioone, mis on avaldatud külgede a , b ja c kaudu. Sellist lahendusmeetodit kasutades jääb punkti kauguse avaldis pikk ja kohmakas. Arkusfunktsioonide kaudu nurkade leidmisel on rohkem mõtet siis, kui kauguse avaldamine käib üle jõu ning tahetakse kaugust arvutuste teel kätte saada.

Ülesande lahendamine toetub joonisele, rõhutame seejuures - joonist tuleb õigesti kasutada. Antud ülesande puhul tuleb silmas pidada, et

- trapetsi diagonaalid ei poolita trapetsi nurki;
- diagonaalid pole risti;
- diagonaalid ei poolita teineteist;
- trapetsi kesklõik ei läbi diagonaalide lõikepunkti;
- diagonaalide lõikepunkt ei jaota diagonaale suhtes 2:1;
- diagonaalide lõikepunkti ristprojektsioon trapetsi alustel ei poolita aluseid.

Nimetatud punktide vastu eksimine lihtsustab oluliselt antud ülesande lahenduskäiku ja annab vale vastuse.

6. ÜLESANNE

(10 punkti)

Ülesannete tekstid

- I** Külmas toas, kus temperatuur oli 0°C , lülitati sisse radiaator ning toa temperatuur hakkas tõusma. Esimese tunniga tõusis temperatuur 5 kraadini. Alates teisest tunnist oli iga tunni ja sellele vahetult eelneva tunni jooksul toimunud temperatuurimuutuste jagatis jääv suurus q . Kolmanda tunni lõpuks oli toas 10 kraadi sooja.
- 1) Arvutage konstant q .
 - 2) Kui soojaks läheb see tuba tundide arvu tõkestamatul kasvamisel?
- II** Külmas toas, kus temperatuur oli 0°C , lülitati sisse radiaator ning toa temperatuur hakkas tõusma. Alates teisest tunnist oli iga tunni ja sellele vahetult eelneva tunni jooksul toimunud temperatuurimuutuste jagatis jääv suurus q . Esimese kahe tunniga tõusis temperatuur 6 kraadini. Kolmanda tunniga kasvas temperatuur 2 kraadi võrra.
- 1) Arvutage konstant q .
 - 2) Kui soojaks läheb see tuba tundide arvu tõkestamatul kasvamisel?
- III** Langevarjur hüppab 1000 m kõrguselt. Suletud varjuga langev langevarjur läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgneva sekundiga 9,8 m rohkem kui eelmise sekundiga. Kui langevarjur on langenud 490 m, siis avab ta langevarju ja liugleb maa poole, läbides nüüd igas sekundis 4 m. Kui kaua see langevarjuhüpe kestab?

Vastused

I 1) $q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$; 2) $\frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} \approx 13,1^{\circ}$ (13°).

II 1) $q = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,768$; 2) $11 + \sqrt{13} \approx 14,6^{\circ}$ (15°).

III Ligikaudu 2,3 minutit.

Näpunäited

- I, II** Järjestikuste tundide temperatuurimuutused kujutavad geomeetrilise jada järjestikuseid liikmeid. Kirjutame välja ülesande tingimused, kasutades geomeetrilise jada vastavaid

valemeid: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $S = \frac{a_1}{1 - q}$, kui $|q| < 1$ ja $n \rightarrow \infty$.

Avaldame saadud seoste abil otsitava suuruse q , arvestades seejuures, et ülesande tingimuste põhjal $q > 0$.

Leidmaks toa soojust tundide arvu tõkestamatul kasvamisel on vaja leida $S \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right)$,

olles eelnevalt veendunud, et tekkinud jada on hääbuv, st et $|q| < 1$.

- III** Esimesed 490 meetrit hüppest: laskumiste teepikkused järjestikuste sekundite jooksul kujutavad aritmeetilise jada järjestikuseid liikmeid, kasutades aritmeetilise jada summa valemit $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, leiame kui palju kulus aega langevarju avamiseni. Siis arvutame ülejäänud 510 m läbimiseks kulunud aja ning arvutame hüppe kestvuse.

Lahendused

I Temperatuurimuutuste jada kohta on teada $a_1 = 5$ ja $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 10$.

1. lahendus

1) Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 = 10 \end{cases} \quad (1) \quad \text{või} \quad \begin{cases} a_1 = 5 \\ \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1} = 10 \end{cases} \quad (2)$$

(1 ja 2) $\Rightarrow q^2 + q - 1 = 0$, millest

$$q_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

$q_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, võõrlahend, ülesande andmete põhjal temperatuur toas hakkas tõusma ($q > 0$).

2) Et jada tegur $|q| < 1$, siis tegemist on hääbuva jadaga. Kasutame valemit $S = \frac{a_1}{1-q}$ ja leiame S .

$$S = \frac{5}{1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{10}{3 - \sqrt{5}} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} \approx 13,1$$

Seega pika aja möödudes on toas ligikaudu $13,1^\circ\text{C}$ sooja.

Vastus. 1) Konstant $q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$ ja 2) küllalt pika aja möödudes on toas sooja $13,1^\circ\text{C}$.

2. lahendus

1) Vaatleme tekkivat temperatuuride jada 5, x ja 10 kraadi vastavalt 1., 2. ja 3. tunni lõpus. Millest moodustame temperatuurimuutuste jada: 5, $x - 5$ ja $10 - x$ kraadi.

Alates teisest tunnist oli iga tunni ja sellele vahetult eelneva tunni jooksul toimunud temperatuurimuutuste jagatis jääv suurus q , st

$$q = \frac{x-5}{5} = \frac{10-x}{x-5} \Rightarrow x^2 - 5x - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{2} \approx 8,09$$

$$x_2 = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{2} < 0 - \text{võõrlahend, sest teksti järgi } x > 5.$$

$$\text{Seega } q = \frac{\frac{5 + 5\sqrt{5}}{2} - 5}{5} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618.$$

2) Lahendus sama, mis 1. lahenduse korral.

3. lahendus

II 1) Olgu temperatuurimuutuste jada $x, y, 2$, siis ülesande tingimuste põhjal:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{y}{x} = q \\ \frac{2}{y} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{6-y} = q \\ y = \frac{2}{q} \end{cases} \Rightarrow \frac{2q}{q(6q-2)} = q \Rightarrow 1 = q(3q-1) \Rightarrow 3q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0,768, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} < 0 \text{ (võõrlahend, sest ülesande teksti järgi } q > 0)$$

2) S leidmiseks arvutame kõigepealt temperatuurimuutuste jada esimese liikme x :

$$y = \frac{2}{q} = \frac{12}{1+\sqrt{13}},$$

$$x = \frac{y}{q} = \frac{12 \cdot 6}{(1+\sqrt{13}) \cdot (1+\sqrt{13})} = \frac{12 \cdot 6}{14+2\sqrt{13}} = \frac{36}{7+\sqrt{13}}.$$

Temperatuurimuutuste summa leiame valemi $S = \frac{a_1}{1-q}$ abil:

$$S = \frac{36}{(7+\sqrt{13})\left(1-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)} = \frac{6 \cdot 36}{(7+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})} = \frac{108}{11-\sqrt{13}} = 11 + \sqrt{13} \approx \underline{14,6^\circ}.$$

III

Esimesed 490 meetri jooksul toimub langemine nii, et järjestikustes ajaühikutes läbitud teepikkused kujutavad aritmeetilise jada järjestikuseid liikmeid, seega: $a_1 = 4,9$, $d = 9,8$ ning $S_n = 490$.

Tähistades esimese 490 m läbimiseks kulutatud aja sekundites n , saame võrrandi $\frac{9,8 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n = 490 \Rightarrow 4,9n^2 = 490$

Lahendades saadud võrrandi saame:

$$n_1 = \underline{10},$$

$$n_2 = -10 \text{ (võõrlahend, sest sekundite arv ei saa olla negatiivne).}$$

Seega 490 meetri läbimiseks kulus 10 sekundit.

Viimased 510 meetrit läbiti $510 : 4 = \underline{127,5}$ sekundiga.

Kokku kulus aega seega 137,5 sekundit, mis on 2 minutit 17,5 sekundit $\approx 2,3$ minutit

Vastus. Langevarjuhüpe kestis ligikaudu 2,3 minutit.

Kommentaariid

Ülesande teksti tuleb lugeda tähelepanelikult ja rohkem kui üks kord, et sellest õigesti aru saada. Endale tuleb selgeks teha, millistest suurustest täpselt jada moodustub ja mis liiki see on. Lahenduskäiku tuleb kindlasti selgitada.

I ja II variandis tuleb tähele panna, et lõpptemperatuur on järjestikuste muutuste summa (mitte jada n -es liige). Kuna tegur $q < 1$, siis on jada hääbuv ja tuleb leida hääbuva geomeetrilise jada kõikide liikmete summa. Summa leidmiseks võib kasutada ka piirväärtust jada n esimese liikme summast S_n , kui $n \rightarrow \infty$. Et tegemist on praktilise ülesandega, siis võib täpsete irratsionaalarvuliste tulemuste asemel kasutada ka nende ligikaudseid väärtusi.

III variandis tuleb mõista, et teepikkus 490 m on aritmeetilise jada teatud arvu liikmete summa.

7. ÜLESANNE

(15 punkti)

Ülesannete tekstid

I Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ alused on paralleelsed y -teljega ja x -telg on trapetsi sümmeetriateljeks.

Antud on tipp $A(1,5; -5,5)$ ning vektor $\overrightarrow{AD} = (3,2;2,4)$.

Tehke joonis.

Leidke

- 1) trapetsi pindala;
- 2) trapetsi alusnurk;
- 3) selle sirge võrrand sirgele, millel paikneb haar AD ;
- 4) haarade pikenduste lõikepunkt.

II Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ alused on paralleelsed x -teljega ja y -telg on trapetsi sümmeetriateljeks.

Antud on tipp $A(-5,5; 1,5)$ ning vektor $\overrightarrow{AD} = (2,4;3,2)$.

Tehke joonis.

Leidke

- 1) trapetsi pindala;
- 2) trapetsi alusnurk;
- 3) selle sirge võrrand sirgele, millel paikneb haar AD ;
- 4) haarade pikenduste lõikepunkt.

III Rombi $ABCD$ diagonaal AC on paralleelne y -teljega. Teda on rombi tipp

$B(-1,6; 0)$ ja vektor $\overrightarrow{BC} = (3,6; 4,8)$.

Tehke joonis.

Leidke

- 1) rombi diagonaalide pikkused;
- 2) rombi nurk α tipu A juures;
- 3) tippe B ja C läbiva sirge s võrrand;
- 4) sirge s ja sirge $x + y - 10,3 = 0$ lõikepunkt.

Vastused

I 1) 27,52; 2) $\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ 08'$; 3) $3x - 4y - 26,5 = 0$; $L\left(\frac{53}{6}; 0\right)$.

II 1) 27,52; 2) $\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ 08'$; 3) $4x - 3y + 26,5 = 0$; $L\left(0; \frac{53}{6}\right)$.

III 1) $AC=9,6$, $BD=7,2$; 2) $\alpha = \arccos 0,2802 \approx 73^\circ 44'$; 3) $y = \frac{4}{3}x + \frac{32}{15}$; 4) $L\left(\frac{7}{2}; \frac{34}{5}\right)$.

Näpunäited

I, II 1) Teeme joonise, selleks kanname koordinaatteljestikku punkti A ja vektori $\overrightarrow{AD}$. Leiame punkti D koordinaadid ning peegeldame punkti A ja D x -teljest (y -teljest).

2) Leiame trapetsi aluste ning kõrguse pikkused ja arvutame trapetsi pindala.

3) Leiame trapetsi alusnurga. Selleks saab kasutada täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilisi funktsioone, siinusteoreemi, koosinusteoreemi, nurka saab leida ka vektorite abil ning sirge AD tõusu kaudu, sirgete AB ja AD vahelise nurgana.

4) Koostame sirge võrrandi, selleks saab kasutada sirge võrrandi erinevaid kujusid (sirge võrrand kahe punkti A ja D kaudu, punkti A ja vektori $\overrightarrow{AD}$ kaudu).

5) leiame haarade pikenduste lõikepunkti. Teame, et trapets on sümmeetriline x -telje (y -telje) suhtes, seega $x = 0$ ($y = 0$). Arvutame teise koordinaadi.

III 1) teeme joonise, selleks kanname koordinaatteljestikku punkti B ja vektori $\overrightarrow{BC}$. Leiame punkti C koordinaadid ning peegeldame punkti C y -teljest, saades nii joonisele punkti A ning kanname joonisele punkti D (kasutame teadmist, et rombi diagonaalid on risti ning poolitavad teineteist).

2) leiame rombi diagonaalide pikkused.

3) leiame rombi nurga. Selleks saab kasutada täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilisi funktsioone, nurka saab leida ka vektorite abil.

4) koostame sirge s võrrandi, selleks saab kasutada sirge võrrandi erinevaid kujusid (sirge võrrand kahe punkti B ja C kaudu, punkti B ja vektori $\overrightarrow{BC}$ kaudu).

5) sirge s ja sirge $x + y - 10,3 = 0$ lõikepunkti leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi.

Lahendused

I Arvutame punkti D koordinaadid: $D(4,7; -3,1)$. Sümmeetria põhjal on punktide B ja C koordinaadid: $B(1,5; 5,5)$; $C(4,7; 3,1)$.

1) trapetsi pindala $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. $AB = a = 2 \cdot 5,5 = 11$; $DC = b = 2 \cdot 3,1 = 6,2$;

$$h = 4,7 - 1,5 = 3,2; S = \frac{11+6,2}{2} \cdot 3,2 = 27,52$$

2) trapetsi alusnurk $\alpha = \arctan \frac{3,2}{2,4} \approx 53^\circ 08'$

3) Sirge AD võrrandi koostame punkti A ja vektori $\overrightarrow{AD}$ kaudu:

$$\frac{x-1,5}{3,2} = \frac{y+5,5}{2,4} \Rightarrow 3x - 4y - 26,5 = 0$$

4) Leiame haarade pikenduste lõikepunkti koordinaadid: teame, et $y = 0$, x koordinaadi leidmiseks tuleb lahendada võrrand $3x - 4 \cdot 0 - 26,5 = 0 \Rightarrow x = \frac{53}{6}$. Lõikepunkt on $L\left(\frac{53}{6}; 0\right)$.

II Arvutame punkti D koordinaadid: $D(-3,1; 4,7)$. Sümmeetria põhjal on punktide B ja C koordinaadid: $B(5,5; 1,5)$; $C(3,1; 4,7)$.

1) trapetsi pindala $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. $AB = a = 2 \cdot 5,5 = 11$; $DC = b = 2 \cdot 3,1 = 6,2$;

$$h = 4,7 - 1,5 = 3,2; S = \frac{11+6,2}{2} \cdot 3,2 = 27,52$$

- 2) trapetsi alusnurk $\alpha = \arctan \frac{3,2}{2,4} \approx 53^\circ 08'$
- 3) Sirge AD võrrandi koostame punkti A ja vektori $\overrightarrow{AD}$ kaudu:

$$\frac{x+5,5}{2,4} = \frac{y-1,5}{3,2} \Rightarrow 4x-3y+26,5=0$$
- 4) Leiame haarade pikenduste lõikepunkti koordinaadid: teame, et $x=0$, y koordinaadi leidmiseks tuleb lahendada võrrand $4 \cdot 0 - 3y + 26,5 = 0 \Rightarrow y = \frac{53}{6}$. Lõikepunkt on $L\left(0; \frac{53}{6}\right)$.

III Arvutame punkti C koordinaadid: $C(2; 4,8)$. Et rombi diagonaalid on risti ning poolitavad teineteist, on punktide A ja D koordinaadid: $A(2; -4,8)$; $D(5,6; 0)$.

- 1) Rombi diagonaalid on $AC = 2 \cdot 4,8 = 9,6$ ning $BD = 2 \cdot 3,6 = 7,2$
- 2) Rombi nurk $\alpha = 2 \cdot \arctan \frac{3,6}{4,8} \approx 73^\circ 44'$
- 3) Sirge s võrrandi koostame punkti B ja vektori $\overrightarrow{BC}$ kaudu:

$$\frac{x+1,6}{3,6} = \frac{y}{4,8} \Rightarrow 4x-3y+6,4=0$$
- 4) Sirge s ja sirge $x+y-10,3=0$ lõikepunkti leidmiseks lahendame

$$\text{võrrandisüsteemi: } \begin{cases} 4x-3y+6,4=0 \\ x+y-10,3=0 \end{cases} \Rightarrow x=3,5, y=6,8.$$

Lõikepunkt on $L(3,5; 6,8)$

Kommentaariid

I, II 1) Trapetsi pindala saab leida ka kujundi tükeldamise või integraali abil.

2) Alusnurka saab leida:

- täisnurkse kolmnurga abil: $\alpha = \arctan \frac{3,2}{2,4} = \arcsin \frac{3,2}{4} = \arccos \frac{2,4}{4}$;
- vektorite abil: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2,4 \cdot 11}{4 \cdot 11} = 0,6 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 08'$;
- siinusteoreemi abil: $\frac{3,2}{\sin \alpha} = \frac{2,4}{\sin 90^\circ}$;
- koosinusteoreemi abil: $\cos \alpha = \frac{16 + 5,76 - 10,24}{2 \cdot 2,4 \cdot 4}$;
- sirge AD tõusunurga kaudu:
 I variant: $k = 0,75 \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \arctan 0,75$,
 II variant: $k = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{4}{3}$;
- sirgete AB ja AD vahelise nurga kaudu:

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$
, kus k_1 ja k_2 on sirgete AB ja AD tõusud.

III

2) Rombi nurka saab leida:

- täisnurkse kolmnurga abil: $\alpha = 2 \cdot \arctan \frac{3,6}{4,8} = 2 \cdot \arcsin \frac{3,6}{6} = 2 \cdot \arccos \frac{4,8}{6}$

8.ÜLESANNE

(15 punkti)

Ülesannete tekstid

I On antud joon $y = x \ln x + 2x$.

1) Leidke sellel joonel punkt $P(x; y)$, mille koordinaatide summa on vähim.

2) Leidke arv a , mille korral sirge $y = ax - 2$ on antud joone puutujaks.

Arvutage vastava puutepunkti koordinaadid.

II On antud joon $y = -x \ln x + 2x$.

1) Leidke sellel joonel punkt $P(x; y)$, mille koordinaatide summa on suurim.

2) Leidke arv b , mille korral sirge $y = 5x + b$ on antud joone puutujaks.

Arvutage vastava puutepunkti koordinaadid.

III On antud kaks funktsiooni $y = \log(kx)$ ja $y = 2 \log(x + 1)$.

1) Leidke kummagi funktsiooni määramispiirkond.

2) Määrake kordaja k nii, et võrrandil $\log(kx) = 2 \log(x + 1)$ on üks lahend.

Vastused

I 1) $P(e^{-4}; -2e^{-4})$; 2) $a = 3 + \ln 2$, puutepunkti koordinaadid on $M(2; 4 + 2 \ln 2)$.

II 1) $P(e^2; 0)$; 2) $b = e^{-4}$, puutepunkti koordinaadid on $M(e^{-4}; 6e^{-4})$.

III 1) Kui $k > 0$, siis $X = (0; +\infty)$, kui $k < 0$, siis $X = (-\infty; 0)$; 2) $k = 4$.

Näpunäited

I, II 1) Esimeses alapunktis on tegemist ekstreemumülesandega. Selleks, et leida suuruse y vähim (suurim) väärtus, on vaja vastav funktsioon $y = f(x)$ esitada valemiga.

Moodustame funktsiooni $S = x + y$, asendades selles y ülesandes antud avaldisega, saame ühe muutuja x funktsiooni $S(x)$.

Uurime saadud funktsiooni tuletise abil, st leiame tuletise $S'(x)$ ja lahendame võrrandi $S'(x) = 0$.

Maksimum- ja miinimumkoha eraldamiseks uurime funktsiooni tuletise märki muutumist tuletise iga nullkoha ümbruses või funktsiooni teise tuletise märki tuletise nullkohal.

Kui punkti P abstsiss on leitud, asendame selle seosesse $y = f(x)$ ja arvutame punkti P ordinaadi.

2) Olgu puutepunkt $M(x_0; y_0)$. Teame, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus kohal x_0 on võrdne funktsiooni tuletisega sellel kohal, seega $a = f'(x_0)$.

Kuna punkt $M(x_0; y_0)$ asetseb nii joonel $y = f(x)$ kui ka puutujal $y = ax + b$ saame koostada võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 + b \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}, \text{ kus } a = f'(x_0).$$

Kui võrrandite vasakud pooled on võrdsed, peavad olema võrdsed ka paremad pooled, seega $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$.

Lahendades saame punkti M abstsissi x_0 (**I**).

(**II**) 2) Lahendades võrrandi $a = f'(x_0)$ saame punkti M abstsissi x_0 .

Pärast seda leiame puutepunkti ordinaadi y_0 ja arvu a (I) või b (II) väärtuse.

III 1) Määramispiirkonna leidmisel lähtume logaritmfunksiooni definitsioonist, silmas pidades, et parameetri k väärtus (kas $k < 0$, või $k > 0$) pole teada.

2) Lahendame võrrandi, kasutades logaritmi omadusi

$$n \log_a |x| = \log_a |x^n| \text{ ja}$$

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y . .$$

Saame ruutvõrrandi, mille diskriminant (D) on võrdne nulliga, sest ülesande andmetel võrrandil peab olema üks lahend. Lahendades võrrandi $D = 0$ parameetri k suhtes, saame kaks k väärtust, millest ainult üks vastab ülesande tingimustele.

Lahendused

I 1) On antud joon $y = x \ln x + 2x$.

On vaja leida punkt $P(x; y)$, mille koordinaatide summa on vähim.

$$\text{Moodustame funktsiooni } S(x) = x + y \Rightarrow S(x) = x + x \ln x + 2x \Rightarrow S(x) = x \ln x + 3x .$$

Uurime saadud funktsiooni miinimumi suhtes.

$$S'(x) = (x \ln x + 3x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + (3x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 3 = \ln x + 4$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 4 = 0 \Rightarrow \ln x = -4 \Rightarrow x = e^{-4}$$

Näitame teise tuletise abi, et $x = e^{-4}$ on miinimumkoht.

$$S''(x) = (\ln x + 4)' = \frac{1}{x}$$

$$S''(e^{-4}) = \frac{1}{e^{-4}} = e^4 > 0 \Rightarrow x_{\min} = e^{-4}$$

Leiame funktsiooni $y = x \ln x + 2x$ väärtuse kohal $x = e^{-4}$:

$$y_{\min} = y(e^{-4}) = e^{-4} \cdot \ln e^{-4} + 2e^{-4} = -4e^{-4} + 2e^{-4} = -2e^{-4} .$$

Seega punkt, mille koordinaatide summa on vähim, on $P(e^{-4}; -2e^{-4})$.

2) Oletame, et puutepunkti koordinaadid on $M(x_0; y_0)$.

Teame, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus kohal x_0 on võrdne funktsiooni tuletisega sellel kohal, ehk $a = f'(x_0)$.

Leiame funktsiooni $y = x \ln x + 2x$ tuletise:

$$y'(x) = (x \ln x + 2x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + (2x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 2 = \ln x + 3 .$$

$$\text{Järelikult } a = \ln x_0 + 3$$

Punkt $M(x_0; y_0)$ on joone ja selle puutuja ühine punkt, järelikult

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 - 2 \\ y_0 = x_0 \ln x_0 + 2x_0 \end{cases}, \text{ kus } a = \ln x_0 + 3 .$$

Arvutame saadud võrrandisüsteemist x_0 :

$$\begin{cases} y_0 = (\ln x_0 + 3)x_0 - 2 \\ y_0 = x_0 \ln x_0 + 2x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \ln x_0 + 3x_0 - 2 = x_0 \ln x_0 + 2x_0 \Rightarrow x_0 = 2 .$$

Leiame parameetri a ja ordinaadi y_0 väärtuse:

$$a = \ln x_0 + 3 \Rightarrow a = 3 + \ln 2 ,$$

$$y_0 = 4 + 2 \ln 2.$$

Seega $a = 3 + \ln 2$ ning puutepunkt on $M(2; 4 + 2 \ln 2)$.

II 1) On antud joon $y = -x \ln x + 2x$.

On vaja leida punkt $P(x; y)$, mille koordinaatide summa on suurim.

Moodustame funktsiooni $S(x) = x + y \Rightarrow S(x) = x - x \ln x + 2x \Rightarrow S(x) = -x \ln x + 3x$.

Leiame funktsiooni $S(x)$ maksimumi.

$$S'(x) = (-x \ln x + 3x)' = -x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)' + (3x)' = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} + 3 = -\ln x + 2$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

Kontrollime teise tuletise abil, kas $x = e^2$ on maksimumkoht.

$$S''(x) = (-\ln x + 2)' = -\frac{1}{x}$$

$$S''(e^2) = -\frac{1}{e^2} = -e^{-2} < 0 \Rightarrow x_{\max} = e^2$$

Leiame funktsiooni $y = x \ln x + 2x$ väärtuse kohal $x = e^2$:

$$y_{\max} = y(e^2) = -e^2 \cdot \ln e^2 + 2e^2 = -2e^2 + 2e^2 = 0.$$

Seega punkt, mille koordinaatide summa on vähim, on $P(e^2; 0)$.

2) Oletame, et puutepunkt on $M(x_0; y_0)$.

Ühelt poolt teame, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja tõus kohal x_0 on võrdne funktsiooni tuletisega sellel kohal, st $a = f'(x_0)$. Teiselt poolt - ülesandes antud puutujaks oleva sirge võrrandist $y = 5x + b$ järeldub, et puutuja tõus on 5, st $a = 5$.

Leiame funktsiooni $y = -x \ln x + 2x$ tuletise ja koostame ülal nimetatud tingimuste põhjal võrrandi puutepunkti abstsissi x_0 leidmiseks.

$$y'(x) = (-x \ln x + 2x)' = -x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)' + (2x)' = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} + 2 = -\ln x + 1$$

$$\text{Järelikult } 5 = -\ln x_0 + 1 \Rightarrow \ln x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = e^{-4}.$$

Leiame puutepunkti ordinaadi y_0 ja parameetri b väärtuse:

$$y_0 = -e^{-4} \cdot \ln e^{-4} + 2e^{-4} = 4e^{-4} + 2e^{-4} = 6e^{-4},$$

$$b = y_0 - 5x_0 = 6e^{-4} - 5e^{-4} = e^{-4}.$$

Seega $b = e^{-4}$ ning puutepunkt on $M(e^{-4}; 6e^{-4})$.

III 1) Funktsioonide $y = \log(kx)$ ja $y = 2\log(x+1)$ määramispiirkonna leidmisel lähtume logaritmfunksiooni definitsioonist.

Funktsiooni $y = \log(kx)$ määramispiirkond: $y = \log(kx) \Rightarrow kx > 0 \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Funktsiooni $y = 2\log(x+1)$ määramispiirkond: $y = 2\log(x+1) \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Seega funktsiooni $y = \log(kx)$ määramispiirkonnaks on vahemik $(-\infty; 0)$, kui $k < 0$ ja vahemik $(0; +\infty)$, kui $k > 0$; funktsiooni $y = 2\log(x+1)$ määramispiirkonnaks on vahemik $(-1; +\infty)$.

2) Määrame kordaja k nii, et võrrandil $\log(kx) = 2\log(x+1)$ on üks lahend.

Kõigepealt leiame määramispiirkondade ühisosa, kui $k < 0$ või $k > 0$:

$$\begin{aligned} k < 0 &\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < \infty \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0, \\ k > 0 &\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < +\infty \end{cases} \Rightarrow 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

Teisendame antud võrrandi temaga samaväärseks ruutvõrrandiks:

$$\log(kx) = 2\log(x+1) \Rightarrow kx = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = kx \Rightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0.$$

Leiame saadud ruutvõrrandi diskriminandi:

$$D = (2-k)^2 - 4 = 4 - 4k + k^2 - 4 = k^2 - 4k.$$

Ruutvõrrandil peab olema üks lahend, järelikult

$$D = 0 \Rightarrow k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k-4) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 4,$$

$k_1 = 0$ - võõrlahend, kuna $kx > 0$.

Seega $k = 4$ ja võrrand on:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ ehk } (x-1)^2 = 0.$$

Saadud võrrandi lahendiks on $x = 1$, mis kuulub tõepoolest vahemikku $(0; \infty)$, nagu parameetri $k > 0$ korral vaja.

Seega võrrandil $\log(kx) = 2\log(x+1)$ on üks lahend, kui kordaja k väärtus on 4.

Kommentaariid

Ülesande teksti tuleb lugeda tähelepanelikult.

Ekstreemumülesandes tuleb hoolega jälgida, kas on vaja uurida ülesandes antud funktsiooni või tuleb moodustada uus funktsioon ja esitada see valemina.

Kui on moodustatud uus funktsioon või ülesande tekstis on tegemist mitme funktsiooniga, siis tuleb hoolega jälgida, millise funktsiooni väärtust on vaja leida.

Diferentseeruva funktsiooni ekstreemumi liiki võib määrata, kas funktsiooni teise tuletise abil, või uurides funktsiooni esimese tuletise käitumist ekstreemumkoha ümbruses.

Variandi II teist alapunkti on võimalik lahendada ka järgmiselt: puutepunktis $M(x; y)$ saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y = 5x + b \\ y = -x \ln x + 2x \end{cases} \Rightarrow 5x + b = -x \ln x + 2x \Rightarrow b = -x \ln x - 3x.$$

Leiame viimase võrduse mõlema poole tuletise, arvestades, et x on muutuja ja b konstant.

Saame

$$0 = -\ln x - 1 - 3 \Rightarrow \ln x = -4 \Rightarrow x = e^{-4}.$$

Järelikult puutepunkti abstsiss on 4.

9. ÜLESANNE

(20 punkti)

Ülesannete tekstid

I Kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ kohta on teada, et tema graafiku puutujate seas on ainult üks selline puutuja, mille tõus on 4, ja selle puutepunkti abstsiss on $x = -\frac{1}{3}$. Veel on teada, et sellel kuupfunktsioonil on ekstreemum kohal $x = -1$. Määrake kordajad a , b ja c .

II Kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + 7$ kohta on teada, et tema graafiku puutujate seas on ainult üks selline puutuja, mille tõus on -25 , ja selle puutepunkti abstsiss on $x = \frac{1}{3}$. Veel on teada, et sellel kuupfunktsioonil on ekstreemum kohal $x = 2$. Määrake kordajad a , b ja c .

III Kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ graafiku ekstreemumpunktid on $A(0; 7)$ ja $B(4; 39)$. Leidke kordajad a , b , c ja d .

Vastused

I $a = b = -3$, $c = 3$. **II** $a = 3$, $b = -3$, $c = -24$. **III** $a = -1$, $b = 6$, $c = 0$, $d = 7$.

Näpunäited

Kolme kordaja määramiseks on vaja leida kolm võrrandit.

I Esimene võrrand: $y'(-\frac{1}{3}) = 4$. (**II** variandis $y'(\frac{1}{3}) = -25$.)

Teise võrrandi saame tingimusest, et võrrandil $y' - 4 = 0$ on täpselt üks lahend. (**II** variandis $y' + 25 = 0$.)

Kolmas võrrand: $y'(-1) = 0$. (**II** variandis $y'(2) = 0$.)

Lahendused

I Kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ avaldises tuleb määrata kolm parameetrit a , b ja c , järelikult on vaja leida nende määramiseks kolm võrrandit.

Teada on, et kuupfunktsioonil $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ on olemas puutuja, mille tõus on 4 ning see puutuja asub kohal $x = -\frac{1}{3}$. See tähendab, et $y'(-\frac{1}{3}) = 4$.

Leiame kuupfunktsiooni tuletise

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

ning asendame selle avaldises vastavad suurused, saame

$$3a\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2b\left(-\frac{1}{3}\right) + c = 4 \quad \text{ehk}$$

$$\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + c = 4 \quad (1).$$

Seega esimene võrrand kordajate leidmiseks on olemas.

Teise võrrandi saame faktist, et kuupfunktsioonil $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ on olemas ainult üks selline puutuja, mille tõus on 4. Kui puutuja tõusuga 4 on ainus, siis see tähendab, et võrrandil $y' = 4$ ehk $3ax^2 + 2bx + c = 4$ on ainult üks lahend. Lahendame võrrandi

$$3ax^2 + 2bx + c - 4 = 0.$$

Vastavalt taandamata ruutvõrrandi lahenduseeskirjale saame $x_1 = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c-4)}}{2 \cdot 3a}$.
Et ruutvõrrandil on üks lahend siis ja ainult siis, kui diskriminant võrdub nulliga, siis $(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c-4) = 0$

ning lahenduseeskiri jääb kujule $x_1 = \frac{-2b}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$.

Et puutuja tõus on 4 kohal $x = -\frac{1}{3}$, siis

$$x_1 = -\frac{1}{3} \text{ ja } -\frac{1}{3} = -\frac{b}{3a} \text{ ehk}$$

$$a = b \quad (2).$$

Teadad on, et ekstreemumi leidumiseks peab $y' = 0$. Antud kuupfunktsioonil on ekstreemum kohal $x = -1$, järelikult $y'(-1) = 0$. Seega

$$3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \text{ ehk}$$

$$3a - 2b + c = 0 \quad (3).$$

Lahendame leitud võrranditest (1), (2), (3) koosneva lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + c = 4 \\ a = b \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Süsteemi lihtsustamisel saame

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}a + c = 4 \\ 3a - 2a + c = 0 \end{cases}$$

Ehk

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}a + c = 4 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

Siit on näha, et $a = -c$ ja $\frac{4}{3}c = 4$, järelikult $c = 3$, $a = -3$ ja $b = -3$.

Vastus: ülesande tingimustele vastav kuupfunktsioon on $y = -3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

II Kuupfunktsiooni kolme kordaja a , b , c määramiseks on vaja leida kolm võrrandit.

Teadad on, et kuupfunktsioonil $y = ax^3 + bx^2 + cx + 7$ on olemas puutuja, mille tõus on -25 ning

see puutuja asub kohal $x = \frac{1}{3}$. See tähendab, et $y'(\frac{1}{3}) = -25$.

Leiame kuupfunktsiooni tuletise

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

ning asendame vastavad suurused, saame

$$3a\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2b\frac{1}{3} + c = -25 \text{ ehk}$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + c = -25 \quad (1).$$

Teise võrrandi kordajate leidmiseks saame faktist, et kuupfunktsioonil $y = ax^3 + bx^2 + cx + 7$ on olemas **ainult üks** selline puutuja, mille tõus on -25 . Kui puutuja tõusuga -25 on ainus, siis see tähendab, et võrrandil

$$3ax^2 + 2bx + c = -25$$

on ainult üks lahend. Lahendame võrrandi

$$3ax^2 + 2bx + c + 25 = 0.$$

Vastavalt taandamata ruutvõrrandi lahenduseeskirjale saame $x_1 = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c+25)}}{2 \cdot 3a}$.

Teadad on, et ruutvõrrandil on üks lahend siis ja ainult siis, kui diskriminant võrdub nulliga. Seega $(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c+25) = 0$

ning lahenduseeskiri jääb kujule

$$x_1 = \frac{-2b}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$$

Et puutuja tõus on -25 kohal $x = \frac{1}{3}$, siis $x_1 = \frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{3} = -\frac{b}{3a}$ ehk $a = -b$ (2).

Teadagi, et ekstreemumi leidumiseks peab $y' = 0$. Antud kuupfunktsioonil on ekstreemum kohal $x = 2$, järelikult $y'(2) = 0$. Seega

$$3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \text{ ehk}$$

$$12a + 4b + c = 0 \quad (3).$$

Lahendame võrranditest (1), (2), (3) koosneva lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + c = -25 \\ a = -b \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Süsteemi lihtsustamisel saame

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b + c = -25 \\ -12b + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Ehk

$$\begin{cases} \frac{1}{3}b + c = -25 \\ -8b + c = 0 \end{cases}$$

Siit on näha, et $b = \frac{1}{8}c$ ja $\frac{25}{24}c = -25$, järelikult $c = -24$, $a = 3$ ja $b = -3$.

Vastus: ülesande tingimustele vastav kuupfunktsioon on $y = 3x^3 - 3x^2 - 24x + 7$.

III Leiame kuupfunktsiooni $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tuletise

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Kuna punktid $A(0;7)$ ja $B(4;39)$ on ekstreemumpunktid, siis funktsiooni ekstreemumi olemasolu tarviliku tingimuse põhjal $y'(0)=0$ ja $y'(4)=0$.

Kuna punktid $A(0;7)$ ja $B(4;39)$ asetsevad funktsiooni graafikul, siis $y(0)=7$ ja $y(4)=39$.

Koostame loetletud 4 tingimuse põhjal 4 võrrandist koosneva võrrandisüsteemi kordajate a , b , c ja d määramiseks ning lahendame selle.

$$\begin{cases} c=0 \\ 48a+8b+c=0 \\ d=7 \\ 64a+16b+4c+d=39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=7 \\ 48a+8b=0 \\ 64a+16b=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=7 \\ 6a+b=0 \\ 4a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=7 \\ 2a=-2 \\ 4a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=7 \\ a=-1 \\ b=6 \end{cases}$$

Vastus: ülesande tingimustele vastav kuupfunktsioon on $y = -x^3 + 6x + d$.

Kommentaariid

I, II Ühe vajaliku võrrandi konstantide määramiseks saab ka faktist, et

a) ruutvõrrandil on täpselt üks lahend juhul, kui diskriminant on null, st **I** variandis

$$(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c - 4) = 0 \text{ ja } \textbf{II} \text{ variandis } (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (c + 25) = 0;$$

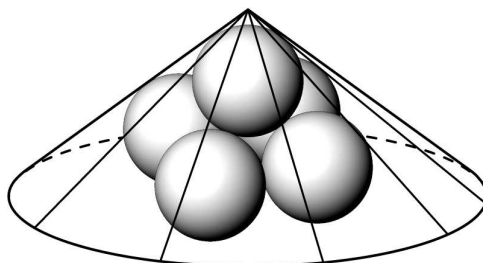
b) kuupfunktsioonil on parajasti üks puutuja käänupunktis, st **I** variandi korral $y''(-\frac{1}{3})=0$ ja **II**

variandi korral $y''(\frac{1}{3})=0$.

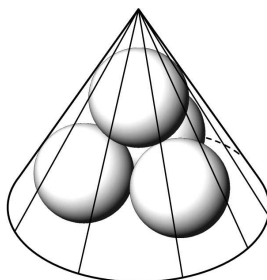
10. ÜLESANNE

(20 punkti)

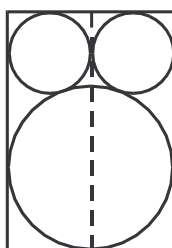
I Koonuse põhjal on neli ühesuurust kera, millest igaüks puutub ülejäänud keradest kahte. Nendel keradel asetseb viies niisama suur kera, vt joonist. Iga kera puutub koonuse külgpinda. Leidke kaugus viienda kera kõige kõrgemast punktist koonuse põhjani ja koonuse telglõike tipunurga suurus, kui kerade raadius on r .



II Koonuse põhjale on asetatud kolm ühesuurust kera, millest igaüks puutub ülejäänud kahte kera. Nendel keradel asetseb neljas niisama suur kera, vt joonist. Iga kera puutub koonuse külgpinda. Leidke kaugus ülemise kera kõige kõrgemast punktist koonuse põhjani ja koonuse telglõike tipunurk, kui kerade raadius on r .



III Silindris paikneb üks suur ja kaks väikest kera, mis puutuvad nii silindri põhjasid, külgpinda kui ka üksteist, vt joonist. Avaldage silindri selle osa ruumala, mis jääb keradest väljapoole, kui väikeste kerade raadius on r .



Silindri telglõige

Vastused

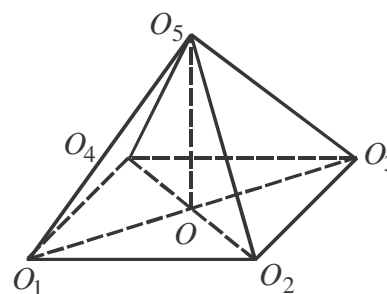
I $r(2+\sqrt{2})$, 90° . **II** $\frac{2r}{3}(3+\sqrt{6})$, $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5^\circ$. **III** $\frac{4(6\sqrt{2}-1)}{3} \pi r^3$.

Näpunäited

I Kerade keskpunktide ühendamisel tekib nelinurkne püramiid, **II** variandis -kolmnurkne püramiid. Ülemise kera kõrgeima tipu kaugus koonuse põhjast on leitav püramiidi kõrguse abil. Koonuse telglõike tipunurga saab leida koonuse diagonaallõikelt.

Lahendused

I Joonestame nelinurkse püramiidi, mille tippudeks on kerade keskpunktid.



Selle püramiidi kõik servad on pikkusega $2r$. Püramiidi põhi $O_1O_2O_3O_4$ on ruut, mille diagonaalid on $O_1O_3 = O_2O_4 = 2\sqrt{2}r$. Püramiidi kõrgus on leitav kolmnurgast O_1OO_5 , mille teadaolevad küljed on $O_1O = \sqrt{2}r$ (pool diagonaalist), $O_1O_5 = 2r$. Vastavalt Phythagorose teoreemile saame $|OO_5| = \sqrt{(O_1O_5)^2 - (O_1O)^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. Et püramiid moodustus kerade

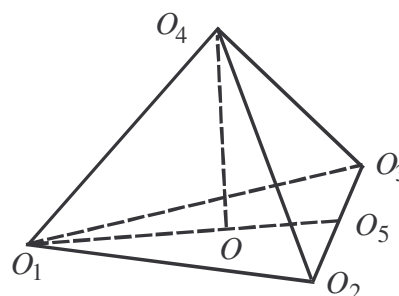
keskpunktidest, siis on vaja püramiidi kõrgusele liita veel $2r$ (ülemise kera raadius ja alumise kera raadius). Seega on viienda kera kõige kõrgema punkti kaugus koonuse põhjast $\sqrt{2}r + 2r = r(\sqrt{2} + 2)$.

Koonuse telglõike tipunurk on võrdne vaadeldava püramiidi diagonaallõike $O_1O_3O_5$ tipunurgaga.

Kolmnurgast O_1OO_5 saame, et $\sin \angle O_1O_5O = \frac{O_1O}{O_1O_5} = \frac{\sqrt{2}r}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $\angle O_1O_5O = 45^\circ$. Järelikult $\angle O_1O_3O_5 = 2 \cdot \angle O_1O_5O = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Koonuse telglõike tipunurk on 90° .

Vastus: viienda kera kõige kõrgema punkti kaugus koonuse põhjast $r(\sqrt{2} + 2)$, koonuse telglõike tipunurk on 90° .

II Joonestame kolmnurkse püramiidi, mille tippudeks on kerade keskpunktid.



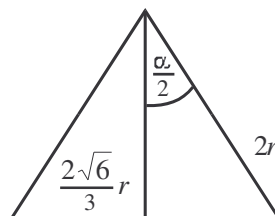
Selle püramiidi kõik servad on pikkusega $2r$ ja kõik küljed on võrdkülgse kolmnurgad. Püramiidi põhi on võrdkülgne kolmnurk $O_1O_2O_3$ kõrgusega $O_1O_5 = \sqrt{3}r$ (vt kolmnurka $O_1O_2O_5$).

Püramiidi kõrgus O_4O on leitav kolmnurgast O_1OO_4 , mille teadaolevad küljed on $O_1O = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}r$ (võrdkülgse kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad punktis, mis jagab kõrguse suhtes 1:2) ja $O_1O_4 = 2r$. Vastavalt Phythagorose teoreemile saame

$$|OO_4| = \sqrt{(O_1O_4)^2 - (O_1O)^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{6}}{3}r. \text{ Et püramiid moodustus kerade}$$

keskpunktidest, siis on vaja püramiidi kõrgusele liita veel $2r$ (ülemise kera raadius ja alumise kera raadius). Seega on viienda kera kõige kõrgema punkti kaugus koonuse põhjast

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}r + 2r = \frac{2r}{3}(\sqrt{6} + 3)$$



Leiame koonuse telglõike tipunurga. Selleks vaatleme koonust, mille tipp asub ülemise kera keskpunktis, ning põhi on tasandil, mis läbib alumiste kerade keskpunkte. Vaadeldav väike koonus ja esialgne suur koonus on sarnased ja nende telglõike tipunurgad on võrdsed. Tekkinud väikese koonuse kõrgus on $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$ ja moodustaja $2r$.

Pool telglõike tipunurgast on leitav koosinusfunktsiooni abil. Saame, et $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ja tipunurk on $2 \arccos \frac{\sqrt{6}}{3} = 70,5^\circ$. Seega koonuse telglõike tipunurk on $70,5^\circ$.

Vastus: viienda kera kõige kõrgema punkti kaugus koonuse põhjast $\frac{2r}{3}(\sqrt{6} + 3)$, koonuse telglõike tipunurk on $70,5^\circ$.

III Tähistame väiksema kera raadiuse tähega r , suurema kera raadiuse tähega R ja kauguse väikeste kerade puutepunktist kuni suurema kera pinnani tähega x .

Vaatleme täisnurket kolmnurka, mille täisnurga tipp asetseb väikeste kerade puutepunktis ning ühe teravnurga tipp väikse kera keskpunktis ja teise teravnurga tipp suure kera keskpunktis. Selle kolmnurga ühe kaateti pikkus on r ja teise kaateti pikkus $x + r$, hüpotenuusi pikkus $r + R$. Pythagorase teoreemi põhjal

$$(x+r)^2 + r^2 = (r+R)^2.$$

Kuna kerad asetsevad silindris liikumatult, siis $R = 2r$.

Avaldame saadud võrranditest x .

$$\begin{cases} (x+R)^2 + r^2 = (r+R)^2 \\ R=2r \end{cases} \Rightarrow (x+2r)^2 + r^2 = (3r)^2 \Rightarrow (x+2r)^2 = 8r^2 \Rightarrow x+2r = 2\sqrt{2}r \Rightarrow x = 2(\sqrt{2}-1)r$$

Avaldame kerade ruumalad ja silindri ruumala väikse kera raadiuse r kaudu.

$$\text{Väikse kera ruumala: } V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{Suure kera ruumala: } V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3.$$

Silindri põhja raadius on võrdne suurema kera raadiusega R , kõrgus võrdub $r + x + 2R$.

Asendame silindri raadiuse ja kõrguse avaldises $R = 2r$ ja $x = 2(\sqrt{2}-1)r$, saame, et väikse kera raadiuse r kaudu avaldatuna on silindri põhja raadius $2r$ ja kõrgus $3r + 2\sqrt{2}r$.

$$\text{Silindri ruumala: } V_3 = \pi (2r)^2 \cdot (3r + 2\sqrt{2}r) = 4\pi r^3 (3 + 2\sqrt{2}).$$

Tähistame silindri selle osa ruumala, mis jääb keradest väljapoole, tähega V ja avaldame selle:

$$V = V_3 - V_2 - 2V_1 = 4\pi r^3(3+2\sqrt{2}) - \frac{32}{3}\pi r^3 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3(9+6\sqrt{2}-8-2) =$$

$$= \frac{4(6\sqrt{2}-1)}{3}\pi r^3.$$

Vastus: keradest väljapoole jääva silindri osa ruumala on $\frac{4(6\sqrt{2}-1)}{3}\pi r^3$.

Kommentaariid

I variandis saab koonuse tipunurga leida ka nurga koosinuse abil. Nimelt $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}r}{2r}$ ja

$$\alpha = 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$

II variandis saab koonuse tipunurga leida ka nurga siinuse abil. Tekkinud tetraeedri kõrgus jaotab põhja kõrguse suhtes 1:2. Koonuse tipunurk on kaks korda suurem, kui nurk, mis tekib tetraeedri kõrguse ja külgserva vahele.

$$\text{Seega } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ja } \alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = 70,5^\circ.$$

Mõlemas variandis saab koonuse tipunurga leidmiseks kasutada koosinusteoreemi. Selle põhjal

$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Külgedeks b ja c on koonusetelglõike haarad ning kolmnurga külge a on telglõike alus.